



## Construção de um Modelo Matemático derivado do acoplamento do Modelo de Resfriamento de Newton e da Dilatação Linear

*Construction of a Mathematical Model derived from the coupling of Newton's Cooling Model and Linear Expansion*

**BEZERRA, Isaias Cicero.** Graduando em Licenciatura em Física

Instituto Federal do Sertão Pernambucano - Campus Salgueiro. BR 232, km 504, sentido Recife, Zona Rural - Salgueiro - PE - Brasil. CEP: 56.000-000/ (87)34210050/E-mail: isaiascicero@yahoo.com.br

**DOMINGOS, Rônero Márcio Cordeiro.** Mestre em Educação Matemática

Instituto Federal do Sertão Pernambucano - Campus Salgueiro. BR 232, km 504, sentido Recife, Zona Rural - Salgueiro - PE - Brasil. CEP: 56.000-000/ (87)34210050/E-mail: roneromarcio@bol.com.br

### RESUMO

Este trabalho é fruto dos resultados de uma pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), que teve como objetivo determinar um modelo matemático que permitisse calcular o tempo que um determinado material, dilatado em  $x$  unidade de medida levou para voltar ao seu comprimento inicial, após retirar a fonte de calor que o aquece e deixá-lo em contato apenas com a temperatura ambiente. A proposta foi descrever, em um único modelo, a relação entre as variáveis tempo, temperatura e comprimento. Para isso, buscou-se acoplar o modelo de dilatação linear ao modelo de resfriamento de Newton. Na realização deste estudo, optou-se por seguir o método de pesquisa experimental. Inicialmente, foi analisado se o material utilizado nos experimentos satisfazia a lei do resfriamento de Newton, em seguida, buscou-se acoplar os dois modelos supracitados e, por último, foi feita a validação do modelo encontrado a partir dos experimentos realizados. Da análise dos dados obtidos nos experimentos, constatou-se que as simulações numéricas realizadas apresentaram uma boa aproximação da situação real. O resultado desta pesquisa (modelo encontrado) pode ser um ponto de partida para outras pesquisas que tenham como objetivo estudar as constantes de dilatação de diferentes tipos de concretos.

Palavras-chave: Dilatação Linear, Modelo de Resfriamento de Newton, Modelo Matemático.

### ABSTRACT

This work is the result of the results of a research carried out by the Institutional Program for Scientific Initiation Scholarships (PIBIC), which aimed to determine a mathematical model that would allow the calculation of the time that a given material, expanded in  $x$  unit of measurement, took to return to its initial length, after removing the heat source that heats it and leaving it in contact only with the ambient temperature. The proposal was to describe, in a single model, the relationship between the variables time, temperature and length. For that, we tried to couple the linear expansion model to Newton's cooling model. In carrying out this study, we opted to follow the experimental research method. Initially, it was analyzed whether the material used in the experiments satisfied Newton's cooling law, then we tried to couple the two models mentioned above and, finally, the validation of the model found from the experiments carried out. From the analysis of the data obtained in the experiments, it was found that the numerical simulations performed presented a good approximation of the real situation. The result of this research (model found) can be a starting point for other research that aims to study the expansion constants of different types of concrete.

keywords: Linear Dilation, Newton's Cooling Model, Mathematical Model.



## Introdução

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), que teve como objetivo determinar um modelo matemático derivado do acoplamento do modelo do resfriamento de Newton e do modelo de dilatação linear. Esse novo modelo possibilita identificar, por exemplo, depois de quanto tempo uma barra de cobre que se dilatar  $x$  unidade de medida de comprimento voltará ao seu tamanho inicial. Além disso, o modelo que foi encontrado viabiliza o estudo de dois fenômenos diferentes, a saber: a dilatação térmica de um corpo e o processo de resfriamento. Para atingir esse objetivo, se fez necessário levar em consideração, na construção do modelo, as seguintes variáveis: comprimento, temperatura do corpo, temperatura ambiente e tempo. O modelo de dilatação linear não possibilita relacionar as variáveis comprimento e tempo, no entanto, quando acoplado ao modelo matemático resfriamento de Newton, essa relação torna-se possível.

Para o alcance do objetivo supracitado, buscou-se seguir rigorosamente os três passos principais de uma atividade de Modelagem Matemática, que, segundo Mayer, Caldeira e Malheiro (2013), consistem em formular um problema, estudar as possíveis soluções e avaliar a solução encontrada.

De posse do problema da pesquisa, que consistiu em encontrar um modelo que permitisse calcular o tempo que um determinado material levaria para voltar ao seu tamanho inicial após ser aquecido, buscou-se estudar modelos que tratassem das variáveis tempo, temperatura e dilatação. Nesse momento, os alunos pesquisadores precisaram se aprofundar nos estudos sobre o Resfriamento de Newton e dilatação linear. Para isso, tiveram que revisar alguns conteúdos da Matemática, como, por exemplo, Equações Diferenciais Ordinárias, Funções Logarítmicas, Funções Exponenciais, Proporcionalidade, Regressão, Correlação, dentre outros conteúdos.

Segundo Santos (2011), o modelo de resfriamento de Newton exprime que a taxa de variação da temperatura  $T(t)$  de um corpo em resfriamento é proporcional a diferença entre a temperatura atual do corpo  $T(t)$  e a temperatura constante do meio ambiente  $T_m$ , ou seja, a temperatura do corpo  $T(t)$  é solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Onde,  $k > 0$ , pois se  $T < T_m$ ,  $\frac{dT}{dt} > 0$  e se  $T > T_m$ ,  $\frac{dT}{dt} < 0$ .

Resolvendo esse problema de valor inicial, chega-se a seguinte expressão:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

Onde  $T_0$  é a temperatura do corpo quando  $t = 0$ ,  $T_m$  é a temperatura ambiente e  $T$  é a temperatura. Esse modelo investiga as variações de temperatura de um objeto em resfriamento.

O modelo de resfriamento de Newton nos possibilita identificar o tempo que um corpo em



resfriamento/aquecimento levará para atingir determinada temperatura.

A dilatação linear consiste no aumento de volume que acontece em apenas uma dimensão: no seu comprimento. É um processo exclusivo dos materiais sólidos submetidos ao aquecimento térmico.

Para Villas Bôas (2017), a variação total do comprimento  $D$  sofrida por um determinado material é diretamente proporcional ao seu comprimento inicial  $L_0$  e a variação de temperatura  $\Delta T$  sofrida pelo material. Dessa forma, vale a seguinte relação:

$$D = L_0 \alpha \Delta T$$

Em que  $\alpha$  é denominada constante de dilatação linear.

Em qualquer pesquisa feita na internet ou em alguns livros básicos da Física, é possível perceber que existe mais de um tipo de dilatação térmica: dilatação linear, dilatação superficial e dilatação volumétrica. No entanto, nesta pesquisa, o foco foi apenas a dilatação linear, com a finalidade de acoplar o modelo que representa esse tipo de dilatação ao modelo do resfriamento de Newton.

Assim, retrata-se, neste trabalho, a fusão dos modelos apresentados, necessária para solucionar o problema da pesquisa.

O modelo encontrado pode possibilitar a identificação da constante de dilatação de diferentes tipos de concretos e, conseqüentemente, facilitar a identificação dos tipos de concretos que suportam altas temperaturas.

### **Materiais e Métodos**

Segundo Romberg (2007), após se definir o problema de uma pesquisa, o pesquisador deve determinar as estratégias (o que fazer?) e os procedimentos (como fazer?) a fim de buscar respostas coerentes para a questão central da pesquisa. Essa fase exige muito esforço e decisões cuidadosas referentes aos métodos e técnicas que devem ser usadas com o intuito de se obter clareza sobre as questões levantadas.

Nesta pesquisa, definiu-se como estratégia geral o estudo teórico referente ao modelo de Resfriamento de Newton e de dilatação linear, bem como a realização de experimentos no laboratório de Física do IF SERTÃO-PE, Campus Salgueiro.

Os estudos teóricos tiveram como finalidade familiarizar o aluno pesquisador com os temas: Modelo de Resfriamento de Newton e Modelo de Dilatação linear. Nessa fase, se estudou separadamente cada um desses conteúdos, buscando estabelecer possíveis relações entre eles.

Após a familiarização com os conteúdos já citados, foram realizados alguns experimentos no Laboratório de Física. Nesses experimentos, buscou-se compreender a relação entre as seguintes grandezas: Tempo, Temperatura e Dilatação Linear.

Para a realização dos experimentos, foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Dilatômetro
- Multímetro

- Software da Cidepe
- Cronômetro
- Câmera Filmadora

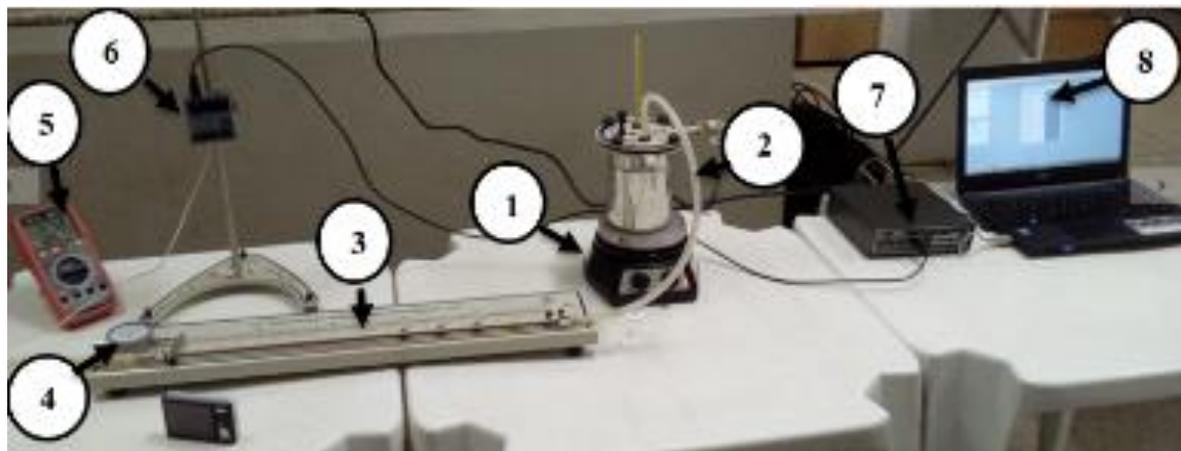
O dilatômetro utilizado para a realização dos experimentos apresentava, em um relógio medidor, o quanto que uma barra de um determinado material havia se dilatado.

Já o Software da Cidepe, através dos sensores de tempo e temperatura, apresentava, no computador, a relação entre essas duas grandezas, informando o tempo que cada material levava para atingir determinada temperatura.

O multímetro foi utilizado para medir a temperatura ambiente do local onde foram realizados os experimentos.

Visando um melhor entendimento por parte do leitor, apresenta-se, na figura 1, uma ilustração de todos os materiais utilizados para a realização dos experimentos.

**Figura 1:** Material utilizado na realização dos experimentos

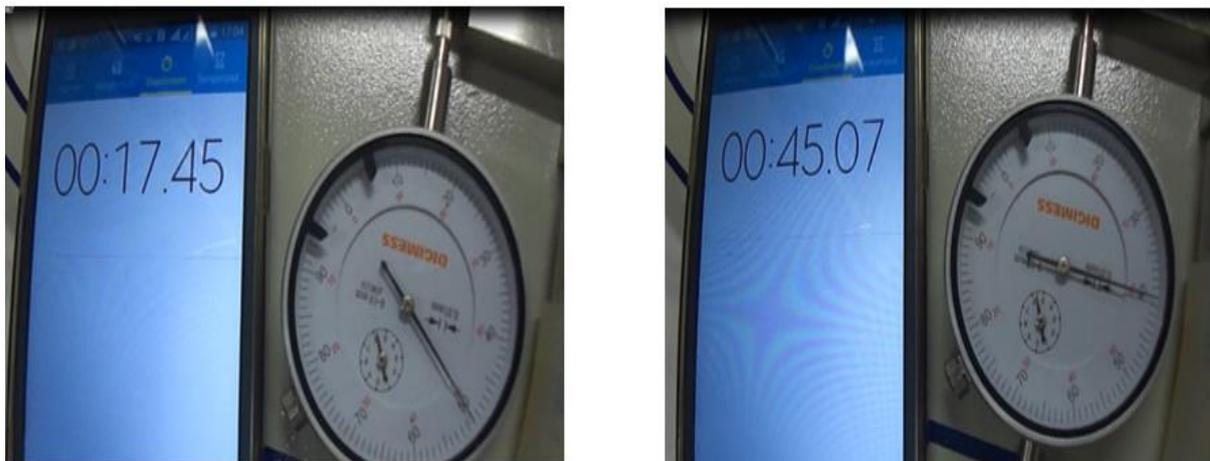


Fonte: Elaborada pelos autores

Descreve-se, abaixo, uma visão geral das funções de cada um dos aparelhos apresentados na figura 1.

1. Aquecedor de água
2. Mangueira por onde passa o vapor da água
3. Barra de cobre
4. Relógio que mede a dilatação da barra de cobre
5. Multímetro utilizado para medir a temperatura ambiente
6. Sensor de temperatura conectado à barra de cobre
7. Aparelho da Cidepe utilizado para medir a temperatura em função do tempo
8. Informações geradas pelo aparelho da Cidepe

Além dos materiais apresentados na figura 1, visando obter a maior quantidade de dados possíveis, foram utilizados um celular e uma câmera fotográfica para registrar a variação da dilatação em função do tempo, com se pode ver na figura 2:

**Figura 2:** Materiais utilizados para registrar a variação da dilatação em função do tempo

Fonte: Elaborada pelos autores

Nesse experimento, buscou-se estudar a dilatação e a temperatura de uma barra de cobre em função do tempo.

Inicialmente, uma barra de cobre foi aquecida até atingir a dilatação máxima (apresentada no relógio medidor do dilatômetro), em seguida, foi retirada a fonte de calor que estava aquecendo a barra, deixando-a em contato apenas com a temperatura ambiente, medida com o multímetro. Após retirar a fonte de calor que aquecia a barra, mediu-se a temperatura inicial, ou seja, a temperatura no instante de tempo zero. Depois de um minuto, fazia-se outra medição e assim se fez por várias vezes. O objetivo desses testes foi entender, a partir do decaimento da dilatação, o padrão de comportamento das variáveis envolvidas.

Ao final de cada experimento, os dados eram organizados em diferentes tabelas. A primeira tabela apresentava a relação entre tempo e dilatação (dados recolhidos a partir das filmagens do pareamento do cronômetro e do relógio medidor do dilatômetro), a segunda tabela mostrava a relação entre tempo e temperatura (dados gerados pelo software da Cidepe), e a última tabela retratava a relação entre temperatura e dilatação (dados provenientes da comparação das duas tabelas anteriores), como se pode ver no quadro 1.

**Quadro 1:** Dados obtidos na realização de um dos experimentos

Tempo (Minutos)	Dilatação (Micrômetro)	Tempo (Minutos)	Temperatura (Grau Celsius)	Temperatura (Grau Celsius)	Dilatação (Micrômetros)
0	60	0	92,2	92,2	60
1	36	1	69,2	69,2	36
2	24	2	59,4	59,4	24
3	16	3	53,0	53,0	16
4	10,4	4	47,8	47,8	10,4
5	7,5	5	43,7	43,7	7,5
6	5,5	6	40,5	40,5	5,5
7	4,9	7	38,1	38,1	4,9
8	3,4	8	36,1	36,1	3,4
9	2,6	9	34,1	34,1	2,6
10	1,7	10	32,6	32,6	1,7
11	0,9	11	31,0	31,0	0,9
12	0,1	12	30,0	30,0	0,1

Fonte: Elaborada pelos autores

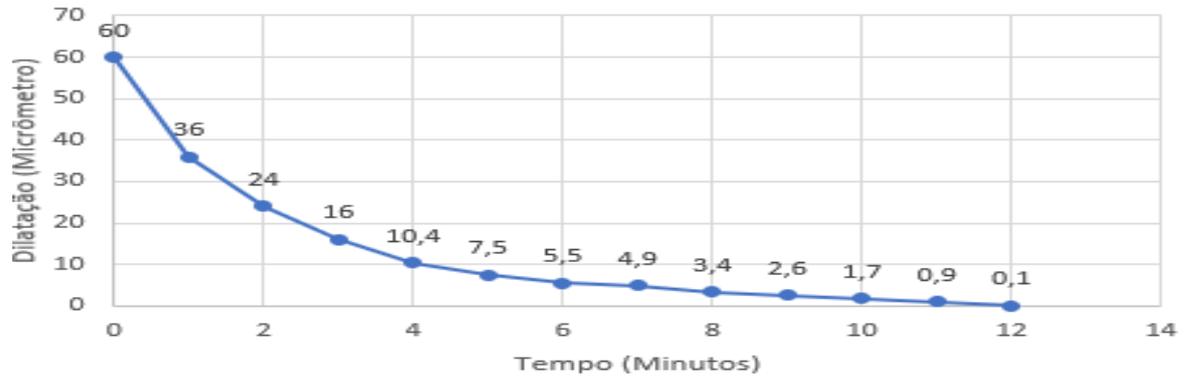


BEZERRA, I. C.; DOMINGOS, R. M.C

Construção de um Modelo Matemático derivado do acoplamento do Modelo de Resfriamento de Newton e da Dilatação Linear

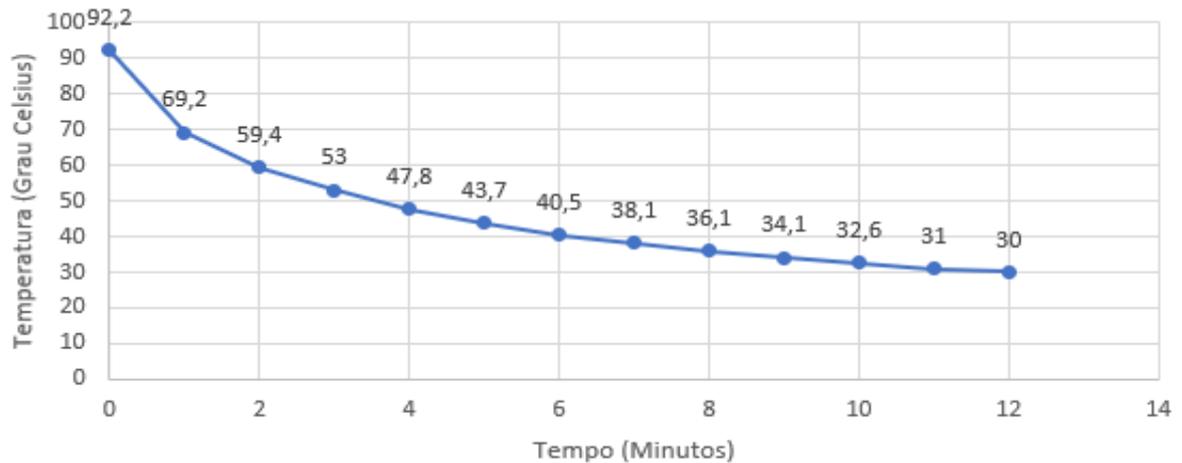
Para cada uma das tabelas acima, foi criado um gráfico a fim de mostrar ao leitor o comportamento das variáveis envolvidas nos experimentos. Ver gráfico 1, 2 e 3.

**Gráfico 1 - Dilatação × Tempo**



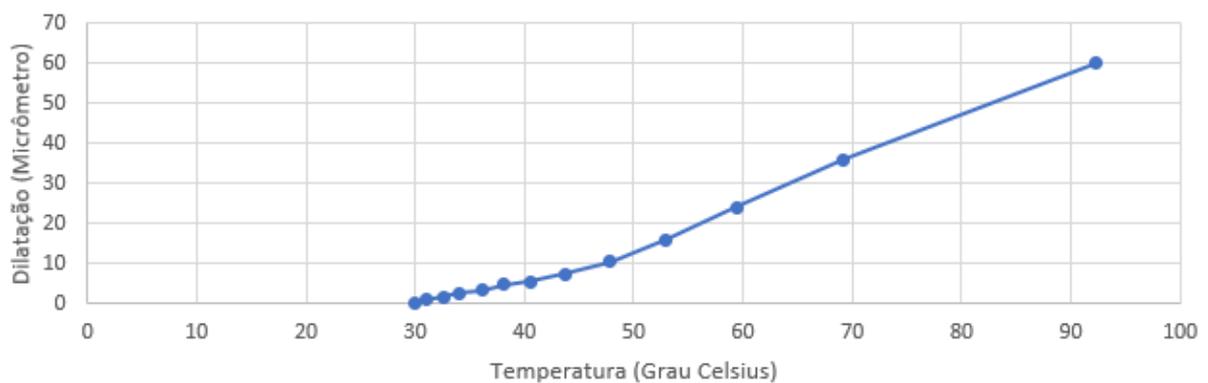
Fonte: Elaborado pelos autores

**Gráfico 2 - Temperatura × Tempo**



Fonte: Elaborado pelos autores

**Gráfico 3 - Dilatação × Temperatura**



Fonte: Elaborado pelos autores



Depois de retirar a fonte de calor que aquecia a barra de cobre, foi feita uma primeira medida e constatou-se que a barra estava com uma temperatura de  $92,2^{\circ}\text{C}$ , conforme a segunda tabela do quadro 1. Após um minuto, a temperatura baixou para  $69,2^{\circ}\text{C}$  em uma temperatura ambiente de  $25^{\circ}\text{C}$ .

Como os dados da tabela decresciam em forma exponencial, para chegar à expressão que representasse a temperatura em função do tempo, partimos do princípio de que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional a temperatura do corpo menos a temperatura ambiente. Essa afirmação é preconizada pela Lei de Resfriamento de Newton. Matematicamente, escreve-se da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (1)$$

Onde  $k > 0$ , pois se  $T < T_m$ ,  $\frac{dT}{dt} > 0$  e se  $T > T_m$ ,  $\frac{dT}{dt} < 0$ .

Separando as variáveis da equação (1), obteremos a seguinte expressão:

$$\frac{dT}{T - T_m} = k dt$$

Integrando ambos os lados da igualdade e aplicando os conceitos de cálculo integral, chegaremos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - T_m} &= \int k dt \\ \ln|T - T_m| &= kt + c \\ e^{\ln|T - T_m|} &= e^{kt+c} \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação, encontraremos:

$$T(t) = T_m + ke^{kt} \quad (2)$$

Em que  $k$  é uma constante real. Para encontrá-la, basta aplicar a condição inicial da equação (1).

Usando  $T(0) = T_0$ , obtém-se  $k = T_0 - T_m$ . Aplicando esse resultado na equação (2), obteremos:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt} \quad (3)$$

Onde  $T_0$  é a temperatura do corpo quando  $t = 0$ ,  $T_m$  é a temperatura ambiente e  $T$  é a temperatura. Esse modelo investiga as variações de temperatura de um objeto em resfriamento.

Seguindo esse raciocínio e aplicando os dados de um dos experimentos, cujos resultados foram apresentados anteriormente na segunda tabela quadro 1 e no gráfico 2, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 25) \\ T(0) = 92,2^{\circ}\text{C}, \quad T(1) = 69,2^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

Separando as variáveis, temos:



$$\frac{dT}{T - 25} = K dt$$

Integrando ambos os membros, resulta em:

$$\ln|T - 25| = kt + c$$

Aplicando a exponencial nos dois lados da igualdade, obtemos:

$$T - 25 = ce^{kt}$$

Ou seja,

$$T = 25 + ce^{kt}$$

Aplicando a condição inicial para determinar o valor de  $c$ , chegamos a:

$$92,2 = 25 + c$$

$$c = 67,2$$

Logo,

$$T = 25 + 67,2e^{kt}$$

Em seguida, aplicamos a segunda condição inicial para determinarmos o valor de  $k$  e obtemos:

$$69,2 = 25 + 67,2e^{k \cdot 1}$$

Ou seja,

$$k = 0,42$$

Dessa forma,

$$T = 25 + 67,2e^{0,42t}$$

Após chegarmos nessa expressão matemática, substituímos no modelo de dilatação linear e resultou em:

$$D = \alpha L_0(25 + 67,2e^{0,42t})$$

Assim, temos a dilatação em função do tempo, o que nos possibilita determinar a partir de quanto tempo a barra que se dilatou  $x$  unidade de medida voltará para seu comprimento inicial.

Para isso, basta substituir  $L_0$  pelo comprimento inicial da barra, que foi de 500 micrômetros,  $\alpha$  pela constante de dilatação do cobre e  $D$  pelo comprimento inicial da barra.

No exemplo anterior, concluiu-se que uma barra de cobre com 500 micrômetros de medida, nas condições já apresentadas, demora aproximadamente 15,9 min para voltar ao seu comprimento inicial, após retirar a fonte de calor que a aquece e deixá-la em contato apenas com a temperatura ambiente.

Após chegarmos nessa conclusão, comparamos o valor encontrado com o valor real que havia sido marcado no cronômetro e percebeu-se que houve uma boa aproximação.

## Resultados e discussão

A partir dos estudos teóricos e da realização dos experimentos descritos na seção anterior, foi possível chegar a um modelo matemático que relaciona as variáveis tempo, temperatura e dilatação.



Segue o modelo abaixo:

$$D = \alpha L_0 (T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt})$$

$D$  = Dilatação

$\alpha$  = Constante de dilatação do material testado

$L_0$  = Comprimento inicial da barra

$T_m$  = Temperatura ambiente

$T_0$  = Temperatura inicial do corpo

$t$  = Tempo

Se um material é aquecido e se dilata linearmente, podemos utilizar o modelo encontrado para determinar o tempo que levará para o material voltar ao seu tamanho inicial. Para isso, basta substituir  $D$  pelo tamanho inicial do material testado,  $\alpha$  pela constante de dilatação do material que está sendo testado,  $T_m$  pela temperatura ambiente,  $T_0$  pela temperatura inicial do corpo (temperatura inicial após retirar a fonte de calor que o aquece) e  $L_0$  pelo tamanho inicial do material testado. Dessa forma, encontra-se o tempo  $t$  que levará para esse material voltar ao seu tamanho inicial. A constante  $k$  será encontrada a partir da aplicação das condições iniciais.

Depois de estudar o modelo encontrado, percebeu-se que podemos utilizá-lo para encontrar a constante de dilatação de diferentes tipos de concretos. Para isso, precisaríamos fazer uma amostra do concreto que se pretende estudar, aquecer a amostra em um forno com alta temperatura, verificar a dilatação do concreto com um extensômetro e medir o comprimento inicial da amostra. De posse dessas informações, basta substituí-las na expressão  $D = \alpha L_0 (T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt})$  e determinar o valor de  $\alpha$ .

Conhecer a constante de dilatação dos tipos de concretos é de extrema importância para a área de construção civil, uma vez que conseguiríamos identificar os materiais resistentes a altas temperaturas.

## Conclusões

Todos os trabalhos desenvolvidos durante a realização da pesquisa contribuíram não somente para chegar ao objetivo proposto inicialmente, mas, também, para possibilitar aos pesquisadores envolvidos um novo conhecimento.

As experiências adquiridas nesse estudo abriram caminhos para novas ideias que poderão ser aplicadas em projetos futuros. Tais ideias ainda se encontram em estado de amadurecimento. Nessas condições, o ponto de chegada desta pesquisa pode significar o ponto de partida para outras investigações.

Feitas essas considerações, encerra-se este trabalho com a expectativa de que possibilite discussões sobre os modelos encontrados e, com isso, contribua para um novo conhecimento dentro da área de estudo.



BEZERRA, I. C.; DOMINGOS, R. M.C

Construção de um Modelo Matemático derivado do acoplamento do Modelo de Resfriamento de Newton e da Dilatação Linear

## Referências

MEYER. J. F. C.; CALDEIRA. A.D.; MALHEIROS. A.P.S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3.ed. - Belo Horizonte: autêntica editora, 2013. 142p.

ROMBERG, T. A. **Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa**. Tradução: Onuchic, L.; Boero, M.L. In: **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

SANTOS, R. j. **Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias**. Belo Horizonte: imprensa Universitária da UFMG, 2011.

VILLAS BÔAS, N.; DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J. **Física 2: Terminologia, ondulatória, óptica**. 3. Ed. São Paulo: Saraiva 2016.